

Ecuaciones Diferenciales II Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales II Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

David Muñoz Gómez

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales II.

Curso Académico 2025/2026.

Grado Doble Grado en Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 9 de Julio de 2026.

Ejercicio 1. Construye una retracción del espacio $\mathbb{R}^3$ en el conjunto

$$[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

Ejercicio 2. Demuestra que la solución maximal del problema

$$x'' + 2x' + x + x^3 = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

está definida en un intervalo que contiene a $[0, \infty[$.

Ejercicio 3. Consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \geq 0}$ definida por

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(t) = 2^n \sin(2^{-n} e^t)$$

¿es uniformemente acotada? ¿es equicontinua?

Ejercicio 4. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera la ecuación

$$x(t) = \frac{1}{2}x(1) + \lambda \int_0^t x(s) \cos s \, ds, \quad t \in [0, 1],$$

donde $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

- Determina $\lambda_* > 0$ de manera que esta ecuación tenga una única solución si $|\lambda| < \lambda_*$.
- Encuentra un número $\lambda^* \in \mathbb{R}$ para el que la ecuación tiene más de una solución si $\lambda = \lambda^*$.

Ejercicio 5. Dada la función

$$\begin{aligned} \varphi :]0, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

¿es posible encontrar una ecuación diferencial en el plano de la que φ sea solución?

Observación. Se consideran ecuaciones del tipo $\dot{x} = X(t, x)$ con $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Ejercicio 6. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ consideramos la ecuación

$$\ddot{x} + 3 \sin x = \varepsilon \sin t.$$

Prueba:

- Dado $v \in \mathbb{R}$ existe una única solución $x(t; v, \varepsilon)$ que cumple $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v$. Además $x(t; v, \varepsilon)$ está definida en todo $\mathbb{R}$,
- la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(v, \varepsilon) = x(\pi; v, \varepsilon)$ es de clase C^1 ,
- existe $\varepsilon_* > 0$ de manera que si $|\varepsilon| < \varepsilon_*$ entonces la ecuación tiene una solución que cumple $x(0) = x(\pi) = 0$.